Continuité et linéarité

E, F, G désignent des espaces vectoriels normés.

I. Continuité des applications linéaires

1°) Applications linéaires continues

Déf : On note $\mathcal{LC}(E,F)$ l'ensemble formé des applications linéaires continues de E vers F.
On note $\mathcal{LC}(E)$ l'ensemble des endomorphismes continus de E.

Théorème :
$\mathcal{LC}(E,F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E,F)$.
$\mathcal{LC}(E)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$.

2°) Application linéaire lipschitzienne

Théorème :
Une application linéaire $u : E \to F$. On a équivalence entre :
(i) u est continue,
(ii) u est continue en 0,
(iii) $\exists k \geq 0$, $\forall x \in E, \|u(x)\|_F \leq k\|x\|_E$.
(iv) u est lipschitzienne.

Cor : Les applications linéaires continues sont uniformément continues.

3°) Application linéaire en dimension finie

Théorème :
Si E est de dimension finie, toute application linéaire de E vers F est continue.

Cor : Soit E et F des espaces de dimension $p, n \in \mathbb{N}^*$ muni de bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.
L'isomorphisme $M : \mathcal{L}(E,F) \to M_{n,p}(\mathbb{K})$ est bicontinue (i.e. continue ainsi que sa réciproque).

4°) Equivalence de normes et continuité

Prop : On a équivalence entre :
(i) N_2 est dominée par N_1,
(ii) $\mathrm{Id}_E : (E, N_1) \to (E, N_2)$ est continue.

Théorème :
On a équivalence entre :
(i) Les normes N_1 et N_2 sont équivalentes,
(ii) L'application $\mathrm{Id}_E : (E, N_1) \to (E, N_2)$ est continue ainsi que sa réciproque.
(iii) Les normes N_1 et N_2 définissent les mêmes ouverts sur E.

II. Norme d'une application linéaire continue

1°) Norme subordonnée

Déf : La quantité $\|u\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|u(x)\|$ est appelée norme de l'application linéaire continue subordonnée aux normes en cours sur E et F.

Théorème :
Si $u \in \mathcal{LC}(E,F)$ alors $\forall x \in E$, $\|u(x)\| \leq \|u\|\|x\|$.

Cor : $\|u\|$ est le plus petit $k \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall x \in E, \|u(x)\| \leq k\|x\|$.

Prop : Si $E \neq \{0\}$ et $u \in \mathcal{LC}(E,F)$ alors $\|u\| = \sup_{\|x\|_E = 1} \|u(x)\|_F = \sup_{x \neq 0} \dfrac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E}$.

2°) Propriétés

Théorème :

L'application $u \mapsto \|u\|$ définit une norme sur $\mathcal{LC}(E,F)$.

Théorème :

Pour $u \in \mathcal{LC}(E,F)$ et $v \in \mathcal{LC}(F,G)$, $v \circ u \in \mathcal{LC}(E,G)$ et $\|v \circ u\| \leq \|v\|\|u\|$.

Cor : L'application $u \mapsto \|u\|$ définit une norme d'algèbre sur $\mathcal{LC}(E)$.

3°) Calcul de norme triple

Pour calculer la norme de $u \in \mathcal{LC}(E,F)$.

- On écrit le plus finement possible $\|u(x)\| \leq k\|x\|$: on en déduit u continue et $\|u\| \leq k$.
- On cherche x tel que $\dfrac{\|u(x)\|}{\|x\|}$ soit le plus grand possible ce qui fournit une minoration de $\|u\|$.

III. Continuité des applications multilinéaires

1°) Les applications bilinéaires

Théorème :

Soit $b : E \times F \to G$ une application bilinéaire. On a équivalence entre :

(i) b est continue

(ii) $\exists k \in \mathbb{R}^+,\ \forall (x,y) \in E \times F,\ \|b(x,y)\|_G \leq k\|x\|_E\|y\|_F$.

Cor : Si E et F sont de dimensions finies alors toute application bilinéaire au départ de $E \times F$ est continue.

2°) Extensions aux applications multilinéaires

Théorème :

Soit $m : E = E_1 \times \cdots \times E_n \to F$ une application multilinéaire. On a équivalence entre :

(i) m est continue

(ii) $\exists k \in \mathbb{R}^+,\ \forall x = (x_1,\ldots,x_n) \in E,\ \|m(x)\|_F \leq k\|x_1\|_{E_1} \cdots \|x_n\|_{E_n}$.

Cor : Les applications multilinéaires au départ d'espaces dimensions finies sont continues.